

L3 – Lambda-calcul

Exercices d'entraînement

Les exercices présentés dans ce document sont à faire à titre de travail personnel et de préparation du premier TD en classe.

Ils sont destinés à entraîner les compétences C.1 et C.2, et à commencer l'entraînement de la compétence C.3 de la grille de compétences en programmation fonctionnelle.

La solution de chaque question se trouve sur la page suivante. Il est crucial ne consulter cette solution qu'en dernier recours, après avoir relu attentivement vos notes de cours, réexaminé les exercices précédents et leurs solutions, pris le temps d'une réflexion approfondie, envisagé plusieurs angles d'approche, pris une petite pause...

Consulter la solution d'un exercice vous privera des connaissances que vous auriez acquises le résolvant seul.

Question 1

Compétence C.1 : Syntaxe des termes

Le terme suivant est-il syntaxiquement correct ? Si oui, décomposez-le en sous-termes en délimitant toutes les abstractions et applications.

$$\lambda x. \lambda y$$

Vous avez des difficultés à trouver la réponse ?

- Relisez attentivement vos notes de cours,
- concentrez-vous,
- laissez-vous un temps de réflexion.

La solution se trouve sur la page suivante mais **Attention !**

Êtes-vous sûr d'avoir tout mis en œuvre pour résoudre cet exercice ? Vous êtes-vous accordé le temps nécessaire ? Avez-vous vraiment mobilisé toute votre concentration, toutes vos ressources intellectuelles ? Dans le cas contraire, prendre connaissance de cette solution vous **privera** des connaissances que vous auriez pu **acquérir** en **résolvant seul** l'exercice !

Solution

Ce terme n'est pas correct car d'après les règles de construction d'un terme de lambda calcul, toute occurrence du symbole λ doit être suivie d'une ou plusieurs occurrences de variables puis d'un point. Dans le terme $\lambda x. \lambda y$, il n'y a aucun point après la deuxième occurrence du symbole λ .

Question 2

Compétence C.1 : Syntaxe des termes

Le terme suivant est-il syntaxiquement correct ? Si oui, décomposez-le en sous-termes en délimitant toutes les abstractions et applications.

$$(xy). \lambda y. x$$

Vous avez des difficultés à trouver la réponse ?

- Relisez attentivement vos notes de cours,
- concentrez-vous,
- laissez-vous un temps de réflexion.

La solution se trouve sur la page suivante mais **Attention !**

Êtes-vous sûr d'avoir tout mis en œuvre pour résoudre cet exercice ? Vous êtes-vous accordé le temps nécessaire ? Avez-vous vraiment mobilisé toute votre concentration, toutes vos ressources intellectuelles ? Dans le cas contraire, prendre connaissance de cette solution vous **privera** des connaissances que vous auriez pu **acquérir** en **résolvant seul** l'exercice !

Solution

Ce terme n'est pas correct car d'après les règles de construction d'un terme de lambda calcul, un point est nécessairement associé à une occurrence du symbole λ . Ce n'est pas le cas du premier point dans le terme $(xy).\lambda y. x$

Question 3

Compétence C.1 : Syntaxe des termes

Le terme suivant est-il syntaxiquement correct ? Si oui, décomposez-le en sous-termes en délimitant toutes les abstractions et applications.

$$\lambda x. xyy$$

Vous avez des difficultés à trouver la réponse ?

- Relisez attentivement vos notes de cours,
- concentrez-vous,
- laissez-vous un temps de réflexion.

La solution se trouve sur la page suivante mais **Attention !**

Êtes-vous sûr d'avoir tout mis en œuvre pour résoudre cet exercice ? Vous êtes-vous accordé le temps nécessaire ? Avez-vous vraiment mobilisé toute votre concentration, toutes vos ressources intellectuelles ? Dans le cas contraire, prendre connaissance de cette solution vous **privera** des connaissances que vous auriez pu **acquérir** en **résolvant seul** l'exercice !

Solution

$$\lambda x. \underbrace{\overbrace{xy}^{ap} y}_{ap}}_{ab}$$

Les abstractions sont notées ab , les applications ap .

L'ensemble du terme est une abstraction, dont le corps contient une application xy , elle-même appliquée à y .

Question 4

Compétence C.1 : Syntaxe des termes

Le terme suivant est-il syntaxiquement correct ? Si oui, décomposez-le en sous-termes en délimitant toutes les abstractions et applications.

$$(\lambda x. y)xx$$

Vous avez des difficultés à trouver la réponse ?

- Relisez attentivement vos notes de cours,
- concentrez-vous,
- laissez-vous un temps de réflexion.

La solution se trouve sur la page suivante mais **Attention !**

Êtes-vous sûr d'avoir tout mis en œuvre pour résoudre cet exercice ? Vous êtes-vous accordé le temps nécessaire ? Avez-vous vraiment mobilisé toute votre concentration, toutes vos ressources intellectuelles ? Dans le cas contraire, prendre connaissance de cette solution vous **privera** des connaissances que vous auriez pu **acquérir** en **résolvant seul** l'exercice !

Solution

$$\underbrace{\underbrace{(\lambda x. y)}_{ap} x}_{ap} x$$

The diagram shows the expression $(\lambda x. y) x x$ with three annotations. A red brace above the lambda abstraction $(\lambda x. y)$ is labeled ab . A green brace below the lambda abstraction and the first x is labeled ap . A black brace below the entire expression $(\lambda x. y) x x$ is labeled ap .

Les abstractions sont notées ab , les applications ap .

L'abstraction $\lambda x. y$ est d'abord appliquée à x , puis le résultat est appliqué à y .

Question 5

Compétence C.1 : Syntaxe des termes

Le terme suivant est-il syntaxiquement correct ? Si oui, décomposez-le en sous-termes en délimitant toutes les abstractions et applications.

$$\lambda z x. (x. \lambda y) z$$

Vous avez des difficultés à trouver la réponse ?

- Relisez attentivement vos notes de cours,
- concentrez-vous,
- laissez-vous un temps de réflexion.

La solution se trouve sur la page suivante mais **Attention !**

Êtes-vous sûr d'avoir tout mis en œuvre pour résoudre cet exercice ? Vous êtes-vous accordé le temps nécessaire ? Avez-vous vraiment mobilisé toute votre concentration, toutes vos ressources intellectuelles ? Dans le cas contraire, prendre connaissance de cette solution vous **privera** des connaissances que vous auriez pu **acquérir** en **résolvant seul** l'exercice !

Solution

Ce terme n'est pas correct car le sous-terme $x.\lambda y$ ne l'est pas. En effet, dans ce sous-terme, le symbole λ n'est pas associé à un point.

Question 6

Compétence C.1 : Syntaxe des termes

Le terme suivant est-il syntaxiquement correct ? Si oui, décomposez-le en sous-termes en délimitant toutes les abstractions et applications.

$$\lambda x. xy \lambda t. tx$$

Vous avez des difficultés à trouver la réponse ?

- Relisez attentivement vos notes de cours,
- concentrez-vous,
- laissez-vous un temps de réflexion.

Indice à n'utiliser que si vous ne parvenez pas à répondre sans aide :

Gardez à l'esprit que tous les termes qui suivent un point sont dans la portée de l'abstraction associée, i.e., $\lambda x. ABCD \dots = \lambda x. (ABCD \dots)$. D'autre part, les applications sont associatives à gauche, i.e., $ABCD \dots = (((AB)C)D \dots)$. Ces deux règles n'offrent qu'une seule possibilité pour décomposer un terme syntaxiquement correct en sous-termes.

La solution se trouve sur la page suivante mais **Attention !**

Êtes-vous sûr d'avoir tout mis en œuvre pour résoudre cet exercice ? Vous êtes-vous accordé le temps nécessaire ? Avez-vous vraiment mobilisé toute votre concentration, toutes vos ressources intellectuelles ? Dans le cas contraire, prendre connaissance de cette solution vous **privera** des connaissances que vous auriez pu **acquérir** en **résolvant seul** l'exercice !

Solution

$$\lambda x. \overbrace{xy}^{ap} \lambda t. \overbrace{tx}^{ap}$$

$\overbrace{\hspace{10em}}^{ap}$

$\overbrace{\hspace{10em}}^{ab}$

Question 7

Compétence C.2 : Variables libres

Identifiez les occurrences libres de variables dans le terme suivant.

$$\lambda x. tx$$

Vous avez des difficultés à trouver la réponse ?

- Relisez attentivement vos notes de cours,
- concentrez-vous,
- laissez-vous un temps de réflexion.

Indice à n'utiliser que si vous ne parvenez pas à répondre sans aide :

Le symbole λ est parfois appelé *lieur* parce qu'il lie plusieurs occurrences d'une variable située dans la portée d'une abstraction. Les variables libres sont précisément celles qui ne sont *pas* liées.

La solution se trouve sur la page suivante mais **Attention !**

Êtes-vous sûr d'avoir tout mis en œuvre pour résoudre cet exercice ? Vous êtes-vous accordé le temps nécessaire ? Avez-vous vraiment mobilisé toute votre concentration, toutes vos ressources intellectuelles ? Dans le cas contraire, prendre connaissance de cette solution vous **privera** des connaissances que vous auriez pu **acquérir** en **résolvant seul** l'exercice !

Solution

$$\lambda x. \underbrace{tx}$$

La variable libre est en rouge. La portée de l'abstraction est en vert.

Question 8

Compétence C.2 : Variables libres

Identifiez les occurrences libres de variables dans le terme suivant.

$$\lambda x y z t . z(x t) a b(z s y)$$

Vous avez des difficultés à trouver la réponse ?

- Relisez attentivement vos notes de cours,
- concentrez-vous,
- laissez-vous un temps de réflexion.

Indice à n'utiliser que si vous ne parvenez pas à répondre sans aide :

Rappelez vous que $\lambda x y z t .$ est une notation abrégée pour $\lambda x . \lambda y . \lambda z . \lambda t .$ Il y a donc 4 lieurs dans ce terme.

La solution se trouve sur la page suivante mais **Attention !**

Êtes-vous sûr d'avoir tout mis en œuvre pour résoudre cet exercice ? Vous êtes vous accordé le temps nécessaire ? Avez-vous vraiment mobilisé toute votre concentration, toutes vos ressources intellectuelles ? Dans le cas contraire, prendre connaissance de cette solution vous **privera** des connaissances que vous auriez pu **acquérir** en **résolvant seul** l'exercice !

Solution

$$\lambda xyz t. \underbrace{z(xt)ab(zsy)}$$

Les variables libres sont en rouge. La portée des abstractions est délimitée par l'accolade verte.

Question 9

Compétence C.2 : Variables libres

Identifiez les occurrences libres de variables dans le terme suivant.

$$\lambda x. y(\lambda z. x(yz))$$

Vous avez des difficultés à trouver la réponse ?

- Relisez attentivement vos notes de cours,
- concentrez-vous,
- laissez-vous un temps de réflexion.

Indice à n'utiliser que si vous ne parvenez pas à répondre sans aide :

Une variable peut être liée dans un terme alors qu'elle est libre dans un sous-terme.

La solution se trouve sur la page suivante mais **Attention !**

Êtes-vous sûr d'avoir tout mis en œuvre pour résoudre cet exercice ? Vous êtes-vous accordé le temps nécessaire ? Avez-vous vraiment mobilisé toute votre concentration, toutes vos ressources intellectuelles ? Dans le cas contraire, prendre connaissance de cette solution vous **privera** des connaissances que vous auriez pu **acquérir** en **résolvant seul** l'exercice !

Solution

$$\lambda x. \underbrace{y \left(\lambda z. \underbrace{x(yz)} \right)}_{\text{green}}$$

Les occurrences de variables libres sont en rouge. La portée de chaque abstraction est indiquée par une accolade de la même couleur que la variable liée par cette abstraction.

Question 10

Compétence C.2 : Variables libres

Identifiez les occurrences libres de variables dans le terme suivant.

$$\lambda c. c(\lambda ab. a)$$

Vous avez des difficultés à trouver la réponse ?

- Relisez attentivement vos notes de cours,
- concentrez-vous,
- laissez-vous un temps de réflexion.

Indice à n'utiliser que si vous ne parvenez pas à répondre sans aide :

Il y a trois abstractions dans ce terme, et non deux comme pourrait le penser un étudiant distrait. N'oubliez pas que $\lambda ab.$ est une abréviation pour $\lambda a. \lambda b.$

La solution se trouve sur la page suivante mais **Attention !**

Êtes-vous sûr d'avoir tout mis en œuvre pour résoudre cet exercice ? Vous êtes-vous accordé le temps nécessaire ? Avez-vous vraiment mobilisé toute votre concentration, toutes vos ressources intellectuelles ? Dans le cas contraire, prendre connaissance de cette solution vous **privera** des connaissances que vous auriez pu **acquérir** en **résolvant seul** l'exercice !

Solution

$$\lambda c. c(\lambda a b. a) =$$
$$\lambda c. c \left(\lambda a. \lambda b. a \right)$$


Il n'y a pas de variable libre. La portée de chaque abstraction est indiquée par une accolade de la même couleur que la variable liée par cette abstraction.

Question 11

Compétence C.2 : Variables libres

Identifiez les occurrences libres de variables dans le terme suivant.

$$\lambda c. c(\lambda z. a z c) z$$

Vous avez des difficultés à trouver la réponse ?

- Relisez attentivement vos notes de cours,
- concentrez-vous,
- laissez-vous un temps de réflexion.

Indice à n'utiliser que si vous ne parvenez pas à répondre sans aide :

Une même variable peut avoir des occurrences liées et des occurrences libres dans un terme.

La solution se trouve sur la page suivante mais **Attention !**

Êtes-vous sûr d'avoir tout mis en œuvre pour résoudre cet exercice ? Vous êtes-vous accordé le temps nécessaire ? Avez-vous vraiment mobilisé toute votre concentration, toutes vos ressources intellectuelles ? Dans le cas contraire, prendre connaissance de cette solution vous **privera** des connaissances que vous auriez pu **acquérir** en **résolvant seul** l'exercice !

Solution

$$\lambda c. c \left(\lambda z. \underbrace{azc}_{\text{portée de } \lambda z} \right) z$$

Les occurrences libres de variables sont en rouge. La portée de chaque abstraction est indiquée par une accolade de la même couleur que la variable liée par cette abstraction. On notera que la dernière occurrence de z n'est pas dans la portée de l'abstraction $\lambda z. azc$. C'est pourquoi cette occurrence est libre.

Question 12

Compétence C.3 : évaluation d'un terme

Évaluez le terme suivant.

$$(\lambda x. x)y$$

Vous avez des difficultés à trouver la réponse ?

- Relisez attentivement vos notes de cours,
- concentrez-vous,
- laissez-vous un temps de réflexion.

Indice à n'utiliser que si vous ne parvenez pas à répondre sans aide :

Il faut d'abord identifier un redex. Or un redex est toujours constitué d'une abstraction encadrée par des parenthèses et suivie d'un terme.

La solution se trouve sur la page suivante mais **Attention !**

Êtes-vous sûr d'avoir tout mis en œuvre pour résoudre cet exercice ? Vous êtes-vous accordé le temps nécessaire ? Avez-vous vraiment mobilisé toute votre concentration, toutes vos ressources intellectuelles ? Dans le cas contraire, prendre connaissance de cette solution vous **privera** des connaissances que vous auriez pu **acquérir** en **résolvant seul** l'exercice !

Solution

$$(\lambda x. x)y \rightarrow$$

y

Le redex est constitué d'un **entête**, d'un **corps** et d'un **argument**. Le résultat de la réduction est le corps du redex dans lequel toutes les occurrences de la variable d'entête ont été remplacées par l'argument.

Question 13

Compétence C.3 : évaluation d'un terme

Évaluez le terme suivant.

$$(\lambda x. x)\lambda x. y$$

Vous avez des difficultés à trouver la réponse ?

- Relisez attentivement vos notes de cours,
- concentrez-vous,
- laissez-vous un temps de réflexion.

Indice à n'utiliser que si vous ne parvenez pas à répondre sans aide :

Il faut d'abord identifier un redex. Or un redex est toujours constitué d'une abstraction encadrée par des parenthèses et suivie d'un terme.

La solution se trouve sur la page suivante mais **Attention !**

Êtes-vous sûr d'avoir tout mis en œuvre pour résoudre cet exercice ? Vous êtes-vous accordé le temps nécessaire ? Avez-vous vraiment mobilisé toute votre concentration, toutes vos ressources intellectuelles ? Dans le cas contraire, prendre connaissance de cette solution vous **privera** des connaissances que vous auriez pu **acquérir** en **résolvant seul** l'exercice !

Solution

$$(\lambda x. x) \lambda x. y \rightarrow$$

$$\lambda x. y$$

Le redex est constitué d'un **entête**, d'un **corps** et d'un **argument**. Le résultat de la réduction est le corps du redex dans lequel toutes les occurrences de la variable d'entête ont été remplacées par l'argument.

Question 14

Compétence C.3 : évaluation d'un terme

Évaluez le terme suivant.

$$(\lambda x. xxx)\lambda x. y$$

Vous avez des difficultés à trouver la réponse ?

- Relisez attentivement vos notes de cours,
- concentrez-vous,
- laissez-vous un temps de réflexion.

Indice à n'utiliser que si vous ne parvenez pas à répondre sans aide :

Évaluer un terme peut demander plusieurs réductions successives. Si la variable d'entête d'une abstraction n'apparaît pas dans le corps de cette abstraction, alors le corps de cette abstraction ne sera pas modifié en cas de réduction.

La solution se trouve sur la page suivante mais **Attention !**

Êtes-vous sûr d'avoir tout mis en œuvre pour résoudre cet exercice ? Vous êtes-vous accordé le temps nécessaire ? Avez-vous vraiment mobilisé toute votre concentration, toutes vos ressources intellectuelles ? Dans le cas contraire, prendre connaissance de cette solution vous **privera** des connaissances que vous auriez pu **acquérir** en **résolvant seul** l'exercice !

Solution

$$\begin{aligned} & (\lambda x. xxx) \lambda x. y \rightarrow \\ & \underbrace{(\lambda x. y) (\lambda x. y) (\lambda x. y)} \rightarrow \\ & y(\lambda x. y) \end{aligned}$$

Le redex est constitué d'un **entête**, d'un **corps** et d'un **argument**. Le résultat de la réduction est le corps du redex dans lequel toutes les occurrences de la variable d'entête ont été remplacées par l'argument. Il faut bien comprendre ici que l'abstraction $\lambda x. y$ se réduit toujours à y , car la variable x n'apparaît pas dans le corps de cette abstraction.

Question 15

Compétence C.3 : évaluation d'un terme

Évaluez le terme suivant.

$$(\lambda y. yy)(\lambda x. xx)$$

Vous avez des difficultés à trouver la réponse ?

- Relisez attentivement vos notes de cours,
- concentrez-vous,
- laissez-vous un temps de réflexion.

Indice à n'utiliser que si vous ne parvenez pas à répondre sans aide :

Il arrive que l'évaluation d'un terme « boucle » à l'infini...

La solution se trouve sur la page suivante mais **Attention !**

Êtes-vous sûr d'avoir tout mis en œuvre pour résoudre cet exercice ? Vous êtes-vous accordé le temps nécessaire ? Avez-vous vraiment mobilisé toute votre concentration, toutes vos ressources intellectuelles ? Dans le cas contraire, prendre connaissance de cette solution vous **privera** des connaissances que vous auriez pu **acquérir** en **résolvant seul** l'exercice !

Solution

$$(\lambda y. yy)(\lambda x. xx) \rightarrow$$

$$(\lambda x. xx)(\lambda x. xx) \rightarrow$$

$$(\lambda x. xx)(\lambda x. xx) \dots$$

Le redex est constitué d'un **entête**, d'un **corps** et d'un **argument**. Le résultat de la réduction est le corps du redex dans lequel toutes les occurrences de la variable d'entête ont été remplacées par l'argument. Nous sommes ici dans un cas où l'évaluation ne se termine jamais.

Question 16

Compétence C.3 : évaluation d'un terme

Évaluez le terme suivant.

$$\left(\lambda f x. (f (f x)) \right) x$$

Vous avez des difficultés à trouver la réponse ?

- Relisez attentivement vos notes de cours,
- concentrez-vous,
- laissez-vous un temps de réflexion.

Indice à n'utiliser que si vous ne parvenez pas à répondre sans aide :

Attention. L'argument x est une variable libre. Il ne faut pas que cette variable libre soit capturée lors d'une substitution dans le corps du redex. Un renommage est donc nécessaire.

La solution se trouve sur la page suivante mais **Attention !**

Êtes-vous sûr d'avoir tout mis en œuvre pour résoudre cet exercice ? Vous êtes-vous accordé le temps nécessaire ? Avez-vous vraiment mobilisé toute votre concentration, toutes vos ressources intellectuelles ? Dans le cas contraire, prendre connaissance de cette solution vous **privera** des connaissances que vous auriez pu **acquérir** en **résolvant seul** l'exercice !

Solution

$$\begin{aligned} & \left(\lambda f x. (f(fx)) \right) x = \\ & \left(\lambda f. \lambda x. (f(fx)) \right) x = \\ & \left(\lambda f. \lambda t. (f(ft)) \right) x \rightarrow \\ & \lambda t. (x(xt)) \end{aligned}$$

Le redex est constitué d'un **entête**, d'un **corps** et d'un **argument**. Le résultat de la réduction est le corps du redex dans lequel toutes les occurrences de la variable d'entête ont été remplacées par l'argument. Ici le problème était que l'argument du redex contient une variable libre x . Or le corps du redex contient une variable liée de même nom. Il faut donc renommer toutes les occurrences de la variable x dans le corps du redex avant de faire la substitution de toutes les occurrences de f par x .